Darstellung von Gruppen

Definition Darstellung von Gruppen

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit Erzeugern $S = (g_1, \ldots, g_k) \in G^k$. Elemente des Kerns von

$$\varphi_S : \mathbb{Z}^k \to G, (m_1, \ldots, m_k) \mapsto \sum_{i=1}^k m_i g_i$$

heißen *Relationen von* S. Sei $\mathrm{Ker}(\varphi_S)$ erzeugt von $r_1, \ldots, r_\ell$. Sei R eine Matrix mit Spaltenvektoren r_i, d.h. $R : \mathbb{Z}^\ell \to \mathbb{Z}^k$. Dann heißt

$$\mathbb{Z}^\ell \xrightarrow{R} \mathbb{Z}^k \xrightarrow{S} G$$

eine *Präsentation* oder *Darstellung* der Gruppe G.

Anmerkungen:

- Es gilt $\mathrm{Ker}(\varphi_S) = \mathrm{Im}(R)$. Aus dem Homomorphiesatz folgt
$$G \cong \mathbb{Z}^k/\mathrm{Ker}(\varphi_S) = \mathbb{Z}^k/\mathrm{Im}(R).$$
- D.h. man kann den Isomorphietyp von G an der Matrix R ablesen.
- Wir müssen noch zeigen, dass $\mathrm{Ker}(\varphi_S)$ endlich erzeugt ist.

Bsp. Darstellung von Gruppen

Bsp: Darstellung von Gruppen

- Für ein zyklisches G mit $G \cong \mathbb{Z}$ erhalten wir die Darstellung
$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z}.$$
- Für ein zyklisches G mit $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ erhalten wir die Darstellung
$$\mathbb{Z} \xrightarrow{(n)} \mathbb{Z} \xrightarrow{(\bar{1})} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ können wir darstellen als
$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{((\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}))} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$
- Eine andere (weniger schöne) Darstellung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist
$$\mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{((\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1}))} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$\mathrm{Ker}(\varphi_S)$ ist endlich erzeugt.

Lemma

Jede Untergruppe $H \subseteq \mathbb{Z}^k$ ist endlich erzeugt.

Beweis: per Induktion nach k

- **IA** für $k = 1$: Sei $H \subseteq \mathbb{Z}$. Dann ist H ein Ideal.
- Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, gilt $H = n\mathbb{Z}$ für ein $n \geq 0$.
- **IS** $k - 1 \to k$.
- Sei $\pi : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}$ die Projektion auf die letzte Komponente.
- Analog zur Argumentation oben gilt $\pi(H) = n\mathbb{Z}$ für ein $n \geq 0$.
- Sei $g \in \pi^{-1}(n) \cap H$.
- Nach IA ist die Projektion $H' = H \cap (\mathbb{Z}^{k-1} \times 0)$ endlich erzeugt.
- Behauptung: Die Erzeuger von H' zusammen mit g erzeugen H.

$\mathrm{Ker}(\varphi_S)$ ist endlich erzeugt.

Beweis: (Fortsetzung)

- zu zeigen: Für jedes $h \in H$ existiert ein $\ell \in \mathbb{Z}$ mit $h - \ell g \in H'$.
- Es gilt $\pi(h) \in \pi(H) = n\mathbb{Z}$. Damit ist
$$\pi(h) = \ell \cdot n = \ell \cdot \pi(g) \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z}.$$
- Es folgt $\pi(h - \ell g) = \pi(h) - \ell \cdot \pi(g) = 0$.
- Damit ist $h - \ell g \in H'$.

Korollar

$\mathrm{Ker}(\varphi_S) \subseteq \mathbb{Z}^k$ ist endlich erzeugt.

Elementare Operationen

Ist $S = (g_1, \ldots, g_k) \in G^k$ ein Erzeugersystem von G, dann auch

1. $(g_1, \ldots, -g_i, \ldots, g_k)$,
2. $(g_{\pi(1)}, \ldots, g_{\pi(k)})$ für eine Permutation $\pi \in \mathrm{Perm}(k)$,
3. $(g_1, \ldots, g_i + \lambda g_j, \ldots, g_k)$ für $i \neq j$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Definition Elementarmatrizen

Die folgenden quadratischen Matrizen heißen *Elementarmatrizen*:

1. E_i: Einheitsmatrix mit Diagonalelement -1 statt 1 an Position (i, i).
2. $P(\pi)$ für $\pi \in \mathrm{Perm}(k)$: In Spalte i steht Einheitsvektor $\mathbf{e}_{\pi(i)}$.
3. $E_{ij}(\lambda)$ für $i \neq j$: Einheitsmatrix mit Eintrag λ an Position (i, j).

Anmerkung:

- Obige Operationen entsprechen Rechts-Multiplikation von S mit
$$E_i,\ P(\pi) \text{ und } E_{ji}(\lambda).$$
- Multiplikation mit einer Elementarmatrix ist invertierbar:
$$E_i^{-1} = E_i,\ P(\pi)^{-1} = P(\pi^{-1}) \text{ und } E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda).$$

Transformation von Darstellungen

Lemma Transformation einer Darstellung

Sei $\mathbb{Z}^\ell \xrightarrow{R} \mathbb{Z}^k \xrightarrow{S} G$ Darstellung einer endl. erzeugten abelschen Gruppe G. Seien E, E' Elementarmatrizen der Größe k bzw. ℓ. Dann ist auch

$$\mathbb{Z}^\ell \xrightarrow{ERE'} \mathbb{Z}^k \xrightarrow{SE^{-1}} G \text{ eine Darstellung von } G.$$

Beweis:

- Sei $S = (g_1, \ldots, g_k) \in G^k$ und damit auch SE^{-1} Erzeuger von G.
- Die Spalten $r_1, \ldots, r_\ell$ von R erzeugen $\mathrm{Ker}(\varphi_S)$. D.h. es gilt
$$\varphi_S(r_i) = \sum_{j=1}^k r_{ij} g_j = 0 \text{ für alle } i.$$
- Wir können dies als inneres Produkt von S und r_i auffassen:
$$S \cdot r_i = 0 = S \cdot E^{-1} \cdot E \cdot r_i.$$
- D.h. Erzeugerwechsel durch Rechts-Multiplikation von S mit E^{-1} erfordert Links-Multiplikation von R mit E.
- Weiterhin ändert sich durch Elementaroperationen auf den r_i das Erzeugnis von R nicht. D.h. wir können R durch RE' ersetzen.

Darstellung mittels Diagonalmatrix

Ziel: Wandle R in $R' = ERE'$, so dass R eine Diagonalmatrix ist.

Satz Darstellung mittels Diagonalmatrix

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit Darstellung $\mathbb{Z}^\ell \xrightarrow{R} \mathbb{Z}^k \xrightarrow{S} G$, wobei

$$R = \left(\begin{array}{ccc|c} n_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & n_r & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dann gilt $G \cong \mathbb{Z}^{k-r} \times \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$.

Beweis: Aus dem Homomorphiesatz folgt

$$G \cong \mathbb{Z}^k/\mathrm{Im}(R) \text{ mit } \mathrm{Im}(R) = n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times n_r\mathbb{Z} \times 0^{k-r}.$$

Klassifikationssatz für endlich erzeugte Gruppen

Satz Klassifikationssatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen

Jede endlich erzeugte Gruppe G ist isomorph zu einem endlichen Produkt zyklischer Gruppen.

Beweis:

- Sei $\mathbb{Z}^\ell \xrightarrow{R} \mathbb{Z}^k \xrightarrow{S} G$ eine beliebige Darstellung von G.
- zu zeigen: Es existieren Elementarmatrizen E, E', so dass $R' = ERE'$ Diagonalgestalt besitzt.
- Geben dazu Algorithmus TRANSFORM an, der R in R' überführt.
- Mit vorigem Satz: G ist ein Produkt zyklischer Gruppen.

Korrektheit von TRANSFORM (s. nächste Folie):

- Bei Terminierung liefert TRANSFORM eine Diagonalmatrix.
- Der Algorithmus muss terminieren, da in Schritt 3 der Absolutbetrag des Minimums der Restmatrix verringert wird.

Algorithmus TRANSFORM

Algorithmus TRANSFORM

EINGABE: Restmatrix $R \in \mathbb{Z}^{k \times \ell}$

Solange eine nicht-triviale Restmatrix existiert, wiederhole:

1. Falls R Nullzeilen bzw. Nullspalten enthält, tausche diesen an den unteren bzw. rechten Rand.
2. Solange eine Position (i, j) in der Restmatrix existiert, so dass $r_{ij} \neq 0$, aber alle anderen Einträge in Zeile i und Spalte j Null sind, tausche Zeile $1 \leftrightarrow i$ und Spalte $1 \leftrightarrow j$ in der Restmatrix.
3. Bestimme ein Element $r_{i_0 j_0} \neq 0$ minimalen Betrags.
   1. Für alle Zeilen $i \neq i_0$: Bestimme $r_{ij_0} = q_i r_{i_0 j_0} + r'_{ij_0}$ mit $0 \leq r'_{ij_0} < r_{i_0 j_0}$. Subtrahiere das q_i-fache der i_0-ten Zeile von der i-ten Zeile.
   2. Für alle Spalten $j \neq j_0$: Bestimme $r_{i_0 j} = q_j r_{i_0 j_0} + r'_{i_0 j}$ mit $0 \leq r'_{i_0 j} < r_{i_0 j_0}$. Subtrahiere das q_j-fache der j_0-ten Spalte von der j-ten Spalte.

AUSGABE: Diagonalmatrix R'

Beispiel Diagonalisieren

Bsp: Diagonalisieren mittels TRANSFORM

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 19 \\ -3 & 6 & -29 \\ \underline{2} & 4 & 16 \\ 3 & 18 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 14 & 3 \\ \underline{2} & 4 & 16 \\ 1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.2} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & -5 \\ 1 & 12 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.1}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & -5 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.2} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{10} \\ 0 & 12 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & \underline{12} \end{array}\right) \xrightarrow{3.1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{12} \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.