

# BUCHBERGER versus GAUSS-ELIMINATION

**Bsp:**  $I = \langle 3w - 6x - 2y, 2w - 4x + 4z, w - 2x - y - z \rangle \subseteq \mathbb{R}[w, x, y, z]$

- Wir stellen  $I$  in Matrixform dar.

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Die normierte Stufenform davon ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Liefert eine minimale Gröbnerbasis  $G = \{w - 2x - y - z, y + 3z\}$ .
- Wir stellen sicher, dass führende Einsen in ihrer Spalte der einzige Nicht-Null Eintrag sind.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Liefert die reduzierte Gröbnerbasis  $G' = \{w - 2x + 2z, y + 3z\}$ .
- Die Gauß-Elimination ist ein Spezialfall von BUCHBERGER.
- $G'$  erlaubt einfaches Lösen des Gleichungssystems.

# Lösen polynomieller Gleichungssysteme

## Bsp:

- Wir suchen alle Lösungen in  $\mathbb{C}$  des Gleichungssystems

$$\left| \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \\ x^2 + z^2 & = & y \\ x & = & z \end{array} \right|.$$

- Sei  $I = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 - y + z^2, x - z \rangle$ .
- Wir wollen  $\mathbf{V}(I)$  bestimmen.

- BUCHBERGER liefert die reduzierte lex-Gröbnerbasis

$$G = \left\{ x - z, y - 2z^2, z^4 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4} \right\}.$$

- Offenbar eliminiert die lex-Ordnung  $x$  in  $g_2$  und  $x, y$  in  $g_3$ .
- Der Generator  $g_3$  hängt nur von  $z$  ab und liefert

$$z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\pm \sqrt{5} - 1}.$$

- Rücksubstitution von  $z$  in  $g_1, g_2$  führt zu Lösungen in  $x$  und  $y$ .
- Damit erhalten wir alle Lösungen unseres Gleichungssystems.

# Eliminationsideal

## Definition Eliminationsideal

Sei  $I = \langle g_1, \dots, g_m \rangle \subseteq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ . Das  $\ell$ -te *Eliminationsideal*  $I_\ell$  ist

$$I_\ell = I \cap \mathbb{F}[x_{\ell+1}, \dots, x_n].$$

## Anmerkung:

- In  $I_\ell$  sind die Variablen  $x_1, \dots, x_\ell$  eliminiert.
- D.h. zum sukzessiven Lösen polynomieller Gleichungssysteme müssen wir Basen für  $I_\ell$  für  $\ell = 1, \dots, n - 1$  berechnen.

# Eliminationstheorem

## Satz Eliminationstheorem

Sei  $G$  eine lex-Gröbnerbasis für  $I \subseteq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ . Dann ist

$$G_\ell = G \cap \mathbb{F}[x_{\ell+1}, \dots, x_n] \text{ für } \ell = 1, \dots, n-1$$

eine Gröbnerbasis des  $\ell$ -ten Eliminationsideals  $I_\ell$ .

### Beweis:

- $\langle LT(G_\ell) \rangle \subseteq \langle LT(I_\ell) \rangle$ : Nach Konstruktion gilt  $G_\ell \subseteq I_\ell$ . Daraus folgt  
$$\langle LT(G_\ell) \rangle \subseteq \langle LT(I_\ell) \rangle.$$
- $\langle LT(I_\ell) \rangle \subseteq \langle LT(G_\ell) \rangle$ : Sei  $f \in I_\ell \subseteq \mathbb{F}[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$ .
- zu zeigen:  $LT(f)$  wird von einem der  $LT(g)$  mit  $g \in G_\ell$  geteilt.
- Da  $f \in I$ , wird  $LT(f)$  von einem der  $LT(g)$  mit  $g \in G$  geteilt.
- Damit ist  $LT(f) \in \mathbb{F}[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$ . Da aber  $x_1 > \dots > x_{\ell+1}$ , folgt  
$$g \in \mathbb{F}[x_{\ell+1}, \dots, x_n].$$
- D.h. insgesamt gilt  $g \in G \cap \mathbb{F}[x_{\ell+1}, \dots, x_n] = G_\ell$ .

# Erweitern partieller Lösungen

**Bsp:** Sei  $I = \langle xy - 1, xz - 1 \rangle \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]$ .

- Das Ideal  $I$  besitzt Gröbnerbasis  $G = \{xy - 1, xz - 1, y - z\}$ .
- $G_1 = G \cap \mathbb{C}[y, z] = y - z$  und  $G_2 = G \cap \mathbb{C}[z] = \emptyset$ , d.h.  $I_2 = \{0\}$ .
- Damit ist jedes  $z \in \mathbb{C}$  eine partielle Lösung.
- Wegen  $y = z$  ist jedes  $(y, z) = (c, c) \in \mathbb{C}^2$  eine partielle Lösung.
- Da  $x = \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$  lässt sich diese Lösung zu  $(\frac{1}{c}, c, c) \in \mathbb{C}^3$  erweitern.
- Allerdings sind diese nur für  $c = 0$  eine Lösung.
- D.h. alle Lösungen  $(y, z) = (c, c), c \neq 0$  sind erweiterbar.

# Erweiterungssatz

## Satz Erweiterungssatz

Sei  $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Für  $i = 1, \dots, m$  sei

$$f_i = h_i(x_2, \dots, x_n)x_1^{N_i} - (\text{Terme mit } \text{grad}(x_1) \leq N_i) \text{ für } h_i \neq 0, N_i \in \mathbb{N}_0.$$

Sei  $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I_1)$ . Es existiert  $a_1 \in \mathbb{C}$  mit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I)$  falls

$$(a_1, \dots, a_n) \notin \mathbf{V}(h_1, \dots, h_m).$$

(ohne Beweis)

**Beispiel:**  $I = \langle xy - 1, xz - 1 \rangle \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]$

- $I_2 = \{0\}$  ist das erste Eliminationsideal von  $I_1 = \langle y - z \rangle \subseteq \mathbb{C}[y, z]$ .
- Es gilt  $y - z = h(z) \cdot y - z$  mit  $h(z) = 1$ . D.h.  $h(z) \neq 0$  für alle  $z$ .
- Damit lassen sich alle Lösungen  $z = c$  zu  $(y, z) = (c, c)$  erweitern.
- Es gilt  $f_1 = \underbrace{y}_{h_1(y,z)} \cdot x - 1$  und  $f_2 = \underbrace{z}_{h_2(y,z)} \cdot x - 1$ .
- Ferner ist  $\mathbf{V}(h_1(y, z), h_2(y, z)) = \{(0, 0)\}$ .
- D.h. alle Lösungen außer  $(y, z) = (0, 0)$  sind erweiterbar.

# Hilberts schwacher Nullstellensatz

## Satz Hilberts schwacher Nullstellensatz

Sei  $I \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  mit  $\mathbf{V}(I) = \emptyset$ . Dann gilt  $I = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ .

(ohne Beweis)

## Satz Lösbarkeit von Gleichungssystemen in $\mathbb{C}$

Sei  $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $G$  reduzierte Gröbnerbasis von  $I$ .  
Falls  $G \neq \{1\}$ , dann besitzt das System  $f_1 = \dots = f_m = 0$  eine Lösung.

### Beweis:

- Es gilt  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] = \langle 1 \rangle$ .  $\{1\}$  ist eine reduzierte Gröbnerbasis.
- D.h. falls  $G \neq \{1\}$ , dann gilt  $I \neq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ .
- Daraus folgt  $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset$  mit schwachem Nullstellensatz.
- Damit besitzt das Gleichungssystem mindestens eine Lösung.