



Hausübungen zur Vorlesung
Diskrete Mathematik II
SS 2012

Blatt 2 / 24. April 2012

Abgabe: 08. Mai 2012, 9 Uhr (vor der Vorlesung), Kasten NA/02

AUFGABE 1 (5 Punkte):

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls keine zwei Knoten $i, j \in U$ durch eine Kante $\{i, j\} \in E$ verbunden sind. Es gilt also für alle Knoten $i, j \in U$, dass $\{i, j\} \notin E$. Sei

$\text{INDEPENDENT} := \{(G, k) \mid G = (V, E) \text{ besitzt eine unabhängige Menge } U \subseteq V \text{ mit } |U| \geq k.\}$.

Zeigen Sie $\text{INDEPENDENT} \in \mathcal{NP}$ durch Angabe einer *NTM*.

AUFGABE 2 (5 Punkte):

Sei $M = \{m_1, \dots, m_n\} \subset \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Sprache

$$\text{SUBSETSUM} := \{(M, t) \mid \text{es existiert ein } S \subseteq M \text{ mit } \sum_{s \in S} m_s = t\}$$

Zeigen Sie $\text{SUBSETSUM} \in \mathcal{NP}$ durch Angabe eines *polynomiellen Verifizierers*.

AUFGABE 3 (5 Punkte):

Sei

$\text{SIEBEN} := \{\phi \mid \phi \text{ ist eine Boolesche Formel mit mindestens sieben erfüllenden Belegungen.}\}$

Zeigen Sie $\text{SAT} \leq_p \text{SIEBEN}$.

Bitte wenden!

AUFGABE 4 (5 Punkte):

Zeigen Sie $\text{INDEPENDENT} \leq_p \text{CLIQUE}$.

AUFGABE 5 (5 Punkte):

Seien $L_1, L_2 \subset \Sigma^*$ Sprachen. Zeigen Sie:

- (a) Gilt $L_1 \in \mathcal{NP}$ und $L_2 \in \mathcal{NP}$, so ist auch $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{NP}$.
- (b) Gilt $L_1 \in \mathcal{NP}$ und $L_2 \in \mathcal{NP}$, so ist auch $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{NP}$.

AUFGABE 6 (5 Punkte):

Betrachten Sie folgende *nicht*-deterministische Turingmaschine N mit Zustandsmenge $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_a, q_r\}$, Startzustand $s = q_0$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Bandalphabet $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, \triangleright\}$ und der folgenden Übergangsfunktion δ :

δ	0	1	\triangleright	\sqcup
q_0	$\{(q_0, 0, R), (q_0, \sqcup, R)\}$	$\{(q_0, 1, R)\}$	$\{(q_0, \triangleright, R)\}$	$\{(q_1, \sqcup, L)\}$
q_1	$\{(q_1, 0, L)\}$	$\{(q_1, 1, L)\}$	$\{(q_r, \triangleright, R)\}$	$\{(q_2, \sqcup, L)\}$
q_2	$\{(q_r, 0, R)\}$	$\{(q_2, 1, L)\}$	$\{(q_r, \triangleright, R)\}$	$\{(q_3, \sqcup, L)\}$
q_3	$\{(q_r, 0, L)\}$	$\{(q_a, 1, R)\}$	$\{(q_r, \triangleright, R)\}$	$\{(q_r, \sqcup, L)\}$

- (a) Zeichnen Sie den Baum der möglichen Berechnungspfade der NTM bei Eingabe 1010. Akzeptiert N die Eingabe 1010? Was ist die maximale Anzahl Rechenschritte $T_N(1010)$ von N auf 1010?
- (b) Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung der von N akzeptierten Sprache an. Was ist die Laufzeit von N ? Die Richtigkeit der Aussagen ist zu beweisen.